Jelgavas novads
Elejas vidusskola

Skaitlis Pi

Zinātniski pētnieciskais darbs matemātikā

Darba autore: *11.a klases skolniece Elīna Davidčuka*
Darba vadītājs: *informātikas skolotājs Jānis Tumovs*

Eleja, 2018

Anotācija

Zinātniski pētnieciskais projekts veltīts skaitlim Pi – pašam slavenākajam no skaitļiem. Darba mērķis ir parādīt, ka skaitļa 3,14 nozīme cilvēka dzīvē var būt daudz plašāka nekā skolā iemācītā riņķa līnijas un diametra attiecība. Darba saturs varētu palīdzēt mazināt skolēnu nepatiku pret matemātikas priekšmetu.

Sasniegtie rezultāti

1) Apkopoti galvenie fakti par Pi vēsturi
2) Aprakstītas Pi aprēķināšanas metodes – ģeometriskā, varbūtību un rindu
3) Analizēti Pi izmantošanas piemēri ārpus matemātikas
4) Praktiski izgatavota diametra mērīšanas mērlente

Аннотация

Научно исследовательский проэкт посвящён числу Пи - самому известному из чисел. Цель работы показать, что значение числа 3,14 в жизни человека может бытъ намного шире, чем в школе выученное соотношение между длиной окружности и диаметра. Содержание работы может уменьшить неприязнь учеников к математике.

Результаты работы

1) Обобщены главные факты об исстории числа Пи

2) Описаны методы вычисления Пи - геометрический, с вероятностями и с числовыми рядами

3) Анализированы примеры использования Пи вне математики

4) Практически изготовлена рулетка для измерения диаметра

Saturs

Ievads

Par skaitli Pi skolas laikā ir dzirdējis ikviens, jo ir mācīts gan par riņķa līniju, gan tās diametru. Ne visi dzīvē atcerēsies Pi pieraksta ciparus, taču 3,14 par sevi vienmēr atgādinās – kad cirtīsiet Ziemassvētku eglīti vai pārdosiet zāģbaļķus, kad izvēlēsities Givenchy smaržas vai svinēsiet pasaules Pi dienu, izbaudot matemātikas skaistumu.

Darba mērķis

Noskaidrot skaitļa Pi matemātisko jēgu

Darba uzdevumi

1. Izpētīt Pi jēdziena attīstības vēsturi
2. Analizēt Pi aprēķināšanas metodes
3. Apkopot interesantus faktus par Pi
4. Izveidot diametra tiešās mērīšanas ierīci

1. Skaitļa Pi vēsture

Skaitlis π ≈ 3,14159... uzskatāms par vienu no vislabāk zināmajām konstantēm pasaulē, jo ir definēts kā riņķa līnijas garuma un tās diametra attiecība:

$$\pi = \frac{C}{D}$$

Visām riņķa līnijām šī attiecība ir viena un tā pati. Grieķu burtu π konstantes apzīmēšanai 1837. gadā sāka lietot Leonards Eilers[1]. Tas tika izvēlēts kā saīsinājums no grieķu vārda *perímetros*.

Skaitlis π pieder iracionālo skaitļu kopai, un to nevar izteikt kā daļu attiecību. To 18. gadsimtā pierādīja Šveices matemātiķis J. Lamberts. Arī radikāļi[2] var būt iracionāli. Piemēram, $\sqrt{2}$, kas ir vienādojuma $x^2 - 2 = 0$ atrisinājums. Turpretim π nevar būt algebriska vienādojuma[3] atrisinājums. Tāpēc π sauc par *transcendentu* skaitli [2, 418].

Ģeometrijā π tuvinājumus var iegūt, summējot riņķa līnijai apvilkta vai riņķa līnijā ievilta regulāra n-stūra malu perimetrus. 1. tabulā redzams, ka pēc šīs metodes jau 192-stūra gadījumā tiek sasniegta tūkstošdaļu precizitāte [1, 234].

n	$\frac{p_n}{D}$	$\frac{P_n}{D}$
48	3,139352	3,146088
96	3,141048	3,142731
192	3,141415	3,141836

1. tabula. Skaitļa π ģeometriskie tuvinājumi.

Pirms mūsu ēras un arī vēlāk matemātiķi π centās izteikt kā divu skaitļu dalījumu. Piemēram, Arhimēds π ietvēra šādā dubultajā nevienādībā: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ jeb 3,14084 < π<3,14286.

2. tabulā apskatāmi atsevišķi mūsu ēras sākumam datēti π noteikšanas sasniegumi [3].

Gads	Dalījums	Precizitāte
130.	365/116	2
150.	377/120	3
263.	3927/1250	5
480.	355/113	7

2. tabula. Skaitļa π daļveida tuvinājumi.

Īpaši nozīmīga ir ķīniešu matemātiķa Zu Chongzhi atrastā daļa 355/133, jo tā π vērtībai dod pat 7 zīmju precizitāti.

[1] Slavens 18. gadsimta matemātiķis
[2] Skaitlis, kas kāpināts daļveida pakāpē jeb sakne
[3] Vienādojums polinoma veidā

1. attēls. Piemineklis Zu Chongzhi[4].

Vēlāk π tuvinājumus sāka aprēķināt, izmantojot rindas[5] [5]. Precizitāte strauji palielinājās līdz ar skaitļošanas ierīču un datoru izgudrošanu.

Eksistē vietnes, kur apskatīt π pierakstu pat ar miljons cipariem, piemēram, http://www.angio.net/pi/digits/pi1000000.txt.

Interesanti, ka 762. vietā aiz komata π ciparos blakus atrodas seši devītnieki. To sauc par Feinmena punktu [4] par godu Ričardam Feinmenam[6]: π = 3,14159 ... 134 999 999 837 ... Bezgalīgā π ciparu virkne kopumā ir haotiska, jo nepakļaujas matemātiskām likumsakarībām.

2. attēls. Richard Phillips Feynman (1918 – 1988).

[4] http://chinesemathematics.weebly.com/zu-chongzhi.html
[5] Elementu virknes, kuru nākamos locekļus nosaka matemātiskas likumsakarības
[6] ASV zinātnieks, Nobela prēmijas laureāts fizikā

2. Pi aprēķināšanas metodes

Pi skaitliskās vērtības uzrakstīšana nodarbinājusi matemātiķu prātus tūkstošiem gadu. Sākumā to veica ar parasto daļu palīdzību, vēlāk ar ļoti garām decimālciparu virknēm, kuras tika izskaitļotas gan prātā, gan vēlāk – ar ESM un datoriem.

Autore parāda, kā to var izdarīt ģeometriski, ar varbūtību un ar skaitļu rindām, lietojot Microsoft Excel.

Kam tad vajadzīgs Pi ar daudzajiem cipariem aiz komata? Zinātniekiem, jo Pi parādās vairākās fizikas likumsakarībās kā formulu sastāvdaļa. Elementārdaļiņu pasaulē un Kosmosa aprēķinos ir nepieciešama maksimālā precizitāte.

2.1. Pi un varbūtība

Varbūtība ir ticamu un nejaušu notikumu iespējamība. Varbūtību teorija ir zinātnes nozare, kas nodarbojas ar varbūtības pētīšanu un analīzi. Varbūtība ir notikuma izpildīšanās gadījumi attiecībā pret visiem iespējamajiem notikumiem. Notikuma varbūtību iespējams izmantot skaitļa π aptuvenā noteikšanā.

Pirmā metode

Nejauši izvēloties divus naturālus skaitļus, varbūtība, ka tiem nav kopīgu dalītāju, ir $6/\pi^2$ [2, 419].

Lai šādi iegūtu π, katram skaitļu pārim jāpārbauda, vai tie ir savstarpēji pirmskaitļi, tas ir, vai tiem lielākais kopīgais dalītājs ir skaitlis viens. Vispirms aprēķinām dalījumu, kas nozīmē minētā notikuma varbūtību, un no iegūtās izteiksmes izsakām π.

$$p = \frac{mēģinājumu\ sakaits\ bez\ kopīgiem\ dalītājiem}{visu\ mēģinājumu\ skaits} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{6}{\pi^2} \quad \rightarrow \quad m\pi^2 = 6n \quad \rightarrow \quad \pi^2 = \frac{6n}{m} \quad \rightarrow \quad \pi = \sqrt{\frac{6n}{m}}$$

Aprakstītā metode ir ērti lietojama, ja izveido datorprogrammu, kas ģenerē gadījuma[7] skaitļu pārus, pārbauda dalītājus un no varbūtības aprēķina π.

Otrā metode

Skaitli π var noteikt, metot adatu uz līniju papīra lapas. Šis matemātiskais modelis kopš 1777. gada pazīstams kā Bifona[8] uzdevums [6.].

Sagrafējam lapu ar paralēlām taisnēm attālumos 2a. Adatu ar garumu 2L ($a \geq L$) metam uz lapas (skat. 3. attēlu). Nosakām varbūtību, ka nokritušajai adatai ir kopīgs punkts ar kādu no taisnēm, tas ir, aprēķinām attiecību "trāpījumi pret visiem metieniem". Ģeometriski šī varbūtība ir $2L/\pi a$ [7.].

---

7 datora nejauši izvēlēts skaitlis

8 Žoržs Bifons (1707-1788) franču dabaszinātnieks

3. attēls. Bifona adata

Turpinājumā π izteiksmes izvedums gadījumam, ja izvēlēta adata, kam garums vienāds ar attālumu starp līnijām. Skaitli π var iegūt, ja vien adatu met pietiekoši daudz reižu.

$$p = \frac{m\bar{e}\acute{g}in\bar{a}jumu\ skaits, kad\ adata\ krusto\ taisni}{visu\ m\bar{e}\acute{g}in\bar{a}jumu\ skaits} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{2}{\pi} \quad \rightarrow \quad m\pi = 2n \quad \rightarrow \quad \pi = \frac{2n}{m}$$

Vietnē http://mste.illinois.edu/activity/buffon/ realizēta metodes datora simulācija.

2.1. Pi un rindas

Matemātiķi atraduši daudz bezgalīgo rindu [5.], kuru locekļus summējot vai sareizinot, iegūst π tuvinājumus. 4. attēlā kā pirmā apskatāma Leibnica[9] formula, kas pazīstama kopš 17. gadsimta.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \cdots$$

$$\pi = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^2} + \cdots\right)$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots$$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \ldots$$

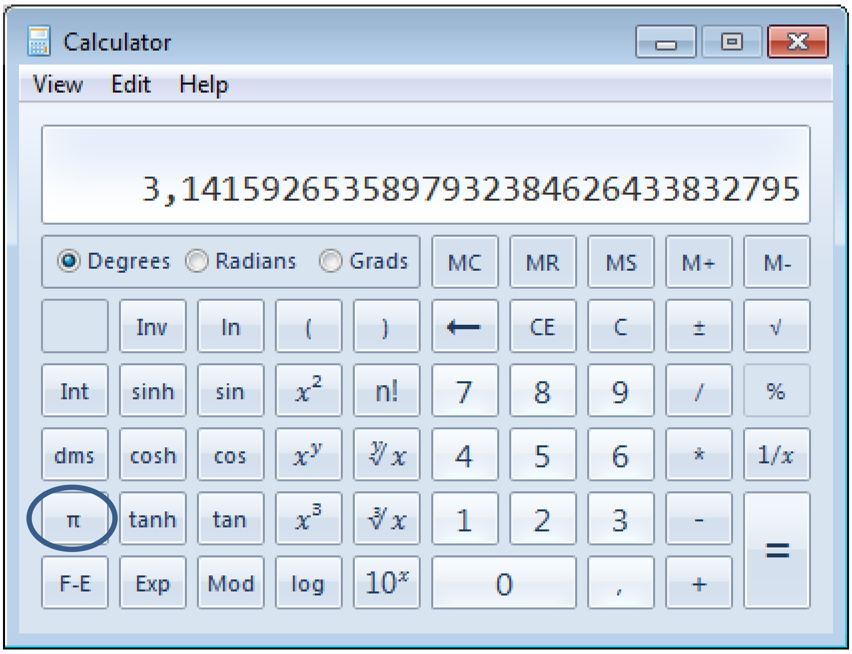
4. attēls. Rindas ar Pi noteikšanai.

Interesanti, ka saskaitot naturālo skaitļu kvadrātu apgrieztās vērtības, iegūst tādu pašu π rezultātu, kā varbūtību metodē par skaitļu pāra dalītājiem.

Jo vairāk rindas locekļu, jo precīzāks būs π tuvinājums. Var izmantot 3. attēlā redzamo kalkulatoru – gan aprēķiniem, gan π vērtības uzzināšanai.

[9] Gotfrīds Vilhelms Leibnics (1646-1716), vācu matemātiķis

Rīkojamies šādi: sasummējam 4. attēla apakšā redzamās daļas izvēlētajā skaitā, reizinām ar 6 un izvelkam kvadrātsakni. Pietiekoši laba precizitāte tiek sasniegta tikai pie lieliem n (tūkstoši, desmiti tūkstoši), kas ar kalkulatoru nav paveicams.



5. attēls. Windows zinātniskais kalkulators.

Ar Microsoft Excel šos aprēķinu viegli automatizēt, lietojot 4. attēlā redzamās formulas. Kopējot tās uz leju, iegūst π tuvinājumus.

	A	B
1	=1/(ROW()*ROW())	=SQRT(6*(SUM(A$1:A1)))

6. attēls. Pi aprēķināšanas formulas.

Tuvinājums uzlabojas līdz ar rindas locekļu skaita pieaugumu. Excel ļauj rēķināt ar precizitāti 15 zīmīgie[10] cipari aiz komata. Tos var redzēt, kad formulas rezultātu ielīmē citā šūnā kā vērtību un pēc tam dublē uz dokumentu. Ticamo[11] ciparu fons tabulā izcelts pelēkā krāsā.

Locekļu skaits n rindā	π vērtība	Cipari aiz komata
23	3,10069730139518	1
600	3,14000202703646	2
1611	3,14100002578649	3
10307	3,14150000806582	4

3. tabula. Skaitļa Pi tuvinājumi.

[10] cipari, kas nav 0 skaitļa pieraksta abos galos
[11] cipari, kas nav iegūti ar noapaļošanu

3. Mērlente diametra tiešajai mērīšanai

Lejuplādēt šeit

Ikdienas dzīvē nereti rodas nepieciešamība uzzināt apaļas figūras diametru. Ja tā ir drāts vai elektrības vada dzīsla, var izmantot mikrometru. Caurulēm diametru nosaka ar bīdmēru, bet mežizstrādē lieto dastmērus.

7. attēls. Mikrometrs[12] un dastmērs[13].

Visticamāk, ka ejot pēc Ziemassvētku eglītes, iepriekš minētās mērierīces līdzi nebūs, taču Latvijas Valsts mežu noteikumi paredz, ka nocirstās eglītes celma diametram jābūt mazākam par 12 cm. Kā to uzzināt?

Diametra tiešā izmērīšana iespējama, izmantojot mērlenti, kuras skala graduēta diametram atbilstošās iedaļās, ja mērītājs to aplicis kādai apaļai formai. Šajā gadījumā riņķa līnijas garums nav jādala ar skaitli Pi, kā tas būtu netiešajā mērīšanā.

Attīstot tīmeklī atrasto ideju [8], autore izgatavojusi diametra mērlenti. To var izdrukāt uz sviestpapīra vai cita plāna un elastīga materiāla.

8. attēlā parādīts mērlentes skalas fragments, kas zīmēts Microsoft Excel lietotnē ar līnijām un caurspīdīgiem tekstlodziņiem. Augšējā skala domāta parastajai garuma noteikšanai. Apakšējā skala izmantojama diametra uzzināšanai, kad mērlente tiek aplikta apaļajai figūrai. Šīs skalas lielākās iedaļas arī nozīmē centimetrus. Tā kā mazo iedaļu skaits ir 20, tad diametra mērīšanas precizitāte ir ±0,5 mm.

Autore pārliecinājās, ka uzzīmēt precīzu un pietiekoši garu skalu nav viegls uzdevums. Traucēja tas, ka monitora attēlā mazās iedaļu atstarpes izskatās nevienādas un savādāk nekā izdrukātas uz papīra. Tas tādēļ, ka ekrāna attēlā ir mazāk punktu vienā collā nekā printeru izdrukās. Vajadzēja atrast sakarību starp datora mērvienībām punktos un pikseļos attiecībā pret mērlentes milimetriem un centimetriem.

Iedaļu un ciparu lielais attēls iegūts no mazākiem skalas gabaliņiem, nokopējot tos un ievietojot darblapā vienu otram galā.

Autore uzskata, ka izdevās sasniegt ļoti labu apakšējās skalas precizitāti, jo tajā 28,3 cm uz parastās skalas atbilst 9 cm uz diametra skalas. Veicot pārbaudi ar dalīšanu, iegūst:

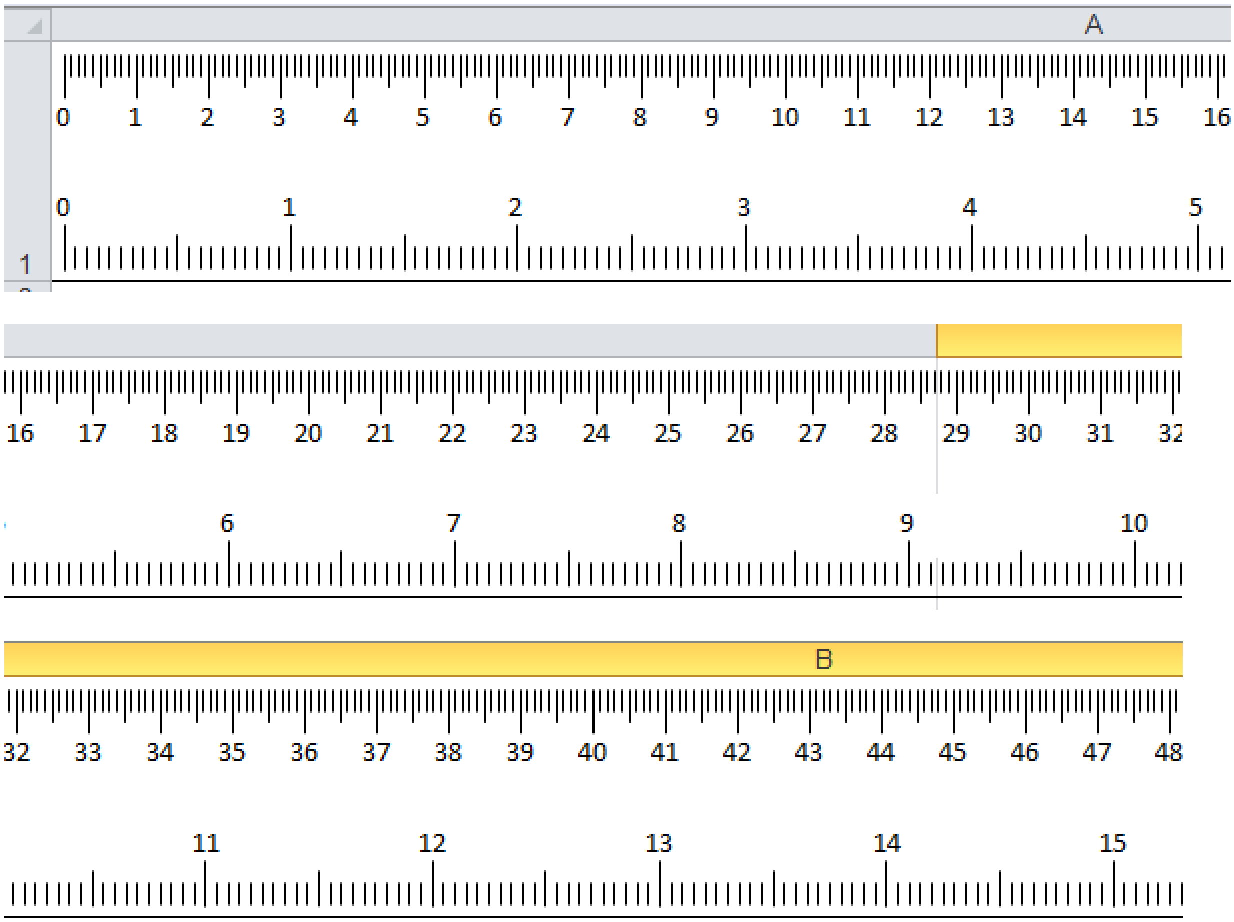
---

[12] https://media.stokker.com/prod/o/776/94472776.jpg
[13] https://cdn1.stihlonline.com

28,3 : 3,14159 = 9,008.

Ainavorientācijā novietotā A4 formāta darblapā ar kreiso un labo apmali 0 cm šūnā A1, kuras platums ir 148 Excel standarta skaitļi (jeb 1041 px) ievietojas aptuveni 28,7 cm garš attēla gabals. Protams, tas atkarīgs arī no datoram pieinstalētā noklusētā printera tehniskajiem parametriem. Autore mērlentes zīmējumu veidojusi, balstoties uz skolas printeri Epson WP-4515, kam iespējams drukāt vismaz 8 mm no lapas malām.

Autore uzskata, ka pietiekoši garu diametra noteikšanas mērlenti varētu viegli izveidot ar datorprogrammas palīdzību, jo skalas objekti – īsākās un garākās svītriņas, kā arī skaitļu uzraksti cikliski atkārtojas. Būtu nepieciešamas tikai aprēķināt to novietojuma koordinātas datora mērvienībās.



8. attēls. Apkārtmēra un diametra skalas.

4. Interesanti fakti par Pi

Matemātikā nemaz nav tik daudz nemainīgo vērtību, kam piešķirts īpašs apzīmējums vai vārds. Bez π = 3,14159 slaveni ir arī skaitlis e = 2,71828 jeb eksponentfunkcijas vai naturālā logaritma bāze, kā arī "zelta griezums" jeb "dievišķā proporcija" φ = 1,61803. Šīs konstantes jēga ir sekojoša: ja taisnstūrim ar malu garumiem 1:1,618 nogriež kvadrātu, atlikumā atkal ir taisnstūris ar tādu pašu malu attiecību, un nogriešanu var turpināt.

Tieši π atpazīstamība veicinājusi 3,14... sakarību meklēšanu dažādās dzīves sfērās: kalendārā, ģeogrāfijā, mūzikā, kriptogrāfijā[14] un dizainā.

4.1. Pi diena

Saistot Pi decimālo pierakstu ar anglisko datuma formātu mm.dd, iegūst 14. martu – arī pasaulslavenā Alberta Einšteina dzimšanas dienu.

1988. gadā ASV fiziķis Lerijs Šovs savā darbavietā *Exploration*[15] noorganizēja pirmo Pi dienas svinēšanas pasākumu. Turpmākajos gados Pi diena kļuva populāra arī citviet pasaulē. 2009. gadā ASV Kongresa Pārstāvju palāta rosināja 14. martu atzīt par nacionālo Pi dienu.

Pi entuziastiem nozīmīgs bija 2015. gada 14. marts (mm.dd.gg), jo tad datumu veidoja pirmie pieci Pi pieraksta cipari. Par katra gada Pi momentu uzskata 14. marta pulksten 1:59, jo π = 3,14159.

Kopš 2012. gada prestižais ASV Masačūsetsas Tehnoloģiskais institūts (MIT) uzaicinājuma vēstules potenciālajiem studentiem izsūta tieši Pi dienā.

Tā kā skaitļa Pi izruna angliskajā fonētikā līdzīga kā vārdam *Pie* (pīrāgs), tad atbilstoši noformētu pīrāgu ēšana ir viena no Pi dienas svinību tradīcijām.

9. attēls. Pi dienas pīrāgs[16].

4.2. Upes un Pi

Līdzenumu upes veido sinusoīdu[17] atgādinošas gultnes (skat. 10. att.). Ja upju kritums mazs, to meandri[18] ir ar daudz lielāku rādiusu, nekā straujajām upēm. Zinot upes garumu un

[14] Zinātne par šifriem
[15] 1969. gadā dibināts zinātnes muzejs Sanfrancisko ASV
[16] https://www.nashvillescene.com/food-drink/bites/article/20854583/celebrate-pi-day-with-nashvilles-best-pies

attālumu no iztekas līdz ietecei, var aprēķināt dalījumu jeb līkumainības koeficientu. Tas vienmēr būs lielāks par 1, jo nepārveidotas upes nav taisnas.

1996. gada 22. martā žurnālā *Science* (Zinātne) tika publicēts pētījums par upju līkumainību. Veicot simulācijas laboratorijā, kā arī izmantojot reālu upju datus, vidējais līkumainības koeficients iznāca aptuveni 3. Pētījuma [9.] autors Hanss-Henriks Stolums hipotēzi balstīja uz to, ka jebkurš upes līkums vai līkumiņš ir daļa no riņķa līnijas loka. Tādēļ vidējā rezultāta tiekšanās uz Pi ir iespējama.

Izmantojot servisu *Google Maps*, var noteikt attālumu no izvēlētās upes iztekas līdz ietekai. Noklikšķinām peles labo pogu sākumpunktā un iedarbinām komandu "Mērīt attālumu", tad norādām galapunktu. Pēc tam jāizdala upes kopgarums ar šo attālumu. Autore Lielupei ieguva 119/68=1,75, bet Daugavai 1020/500=2,04. Toties Gauja pēc tecējuma ir netipiska upe jo sākas un beidzas samērā tuvu, lai gan ir gara. Tāpēc līkumainības koeficients iznāk liels – 452/90=5,02.

10. attēls. Upes meandri. [9.]

4.3. Pi un dizains

Noslēpumainā π zīme dizaineriem šķitusi gana pievilcīga, lai ar to noformētu ikdienā lietotus izstrādājumus. Matemātikas pasākumos labs ietērps varētu būt 11. attēlā redzamais T-krekls[19]. Tīmeklī atrodami arī citi ar apģērbu saistīti Pi izmantošanas piemēri: zeķes, apavi, kaklasaites[20].

Starp daudzajiem Pi simbolikas krūzīšu[21] paraugiem autori piesaistīja 12. attēlā redzamās, jo uz tām ar humoru uzrakstīts, ka šī cilvēka PIN kods ir Pi pēdējie 4 cipari un, ka mīla būs tikpat mūžīga kā Pi ciparu virkne.

Kosmētikas līdzekļu dizainā izceļas Parīzes modes namā *Givenchy* radītais vīriešu odekolonu zīmols π. Piemēram, 13. attēlā redzamais *Pi Neo* radīts filmas *Matrix* iespaidā un satur bergamotes, mandarīna, ciedra un vaniļas aromātu sajaukumu.

[17] Matemātikā – sinusa funkcijas līknes nosaukums
[18] Ģeogrāfijā – upes līkumi
[19]http://www.personalizedteachershirts.com
[20] https://www.zazzle.com
[21] http://offbeathome.com/pi-themed-gifts

11. attēls. Pi zīme apģērbā.

12. attēls Pi humors.

13. attēls. *Givenchy* odekoloni.[22]

[22] https://www.givenchybeauty.com/en/search/Pi

Secinājumi

1. Pi ir pasaulē vislabāk pazīstamā konstante
2. Pi decimālcipari saistījuši matemātiķu ievērību gan senatnē, gan mūsu dienās
3. Pi aprēķinu precizitāte tieši saistīta ar datorikas attīstību
4. Pi atrodams matemātikas un fizikas formulās
5. Pi simbols ir populārs preču dizaina elements
6. Pi jēdzienu skolā vajadzētu mācīt, balstoties uz kompetenču pieeju

Izmantotie avoti

1. H. Graudone, U. Grīnfelds, G. Malzubre, J. Mencis, K. Šteiners. Rokasgrāmata elementārajā matemātikā. Rīga: Zvaigzne, 1982. – 511.

2. Мартин Гарднер. Математические головоломки и развлечения. Москва: Оникс, 1994. – 510.

3. https://en.wikipedia.org/wiki/Chronology_of_computation_of_%CF%80

4. https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_Feynman

5. https://lv.wikipedia.org/wiki/Pī

6. http://mste.illinois.edu/activity/buffon/

7. http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2013/02/1112MMU5_Varbuutiibu_teorija2.pdf

8. http://sneakyuses.com/images/Sneaky_Pidetector.pdf

9. https://www.theguardian.com/science/alexs-adventures-in-numberland/2015/mar/14/pi-day-2015-pi-rivers-truth-grime